

# SÍNTESE DE OBSERVADORES PARA SISTEMAS DESCRITORES COM OTIMIZAÇÃO DE CONDICIONAMENTO NUMÉRICO

VILEMAR G. DA SILVA \*, EUGÊNIO B. CASTELAN†

\**DE,EE-CCET-UFMA*  
*Campus do Bacanga-65085-580*  
*São Luís, MA, Brasil*

†*DAS-CTC-UFSC*  
*Campus da Trindade - 88040-900*  
*Florianópolis, SC, Brasil*

Emails: vilemar@dee.ufma.br, eugenio@das.ufsc.br

**Resumo**— Um problema de projeto de observadores para sistemas descritores com requisito de condicionamento numérico, a partir de resultados anteriores que garantem o cálculo de observadores com desacoplamento de perturbações externas, é considerado. O requisito de condicionamento numérico tem o objetivo de minimizar o número de condição de uma matriz não singular envolvida no cálculo de matrizes estruturais do observador. Mostra-se, portanto, que o requisito de condicionamento numérico pode ser obtido após a escolha de uma solução prévia para o observador desacoplado de perturbação, sem alterar o posicionamento original dos pólos, nem propriedades do tipo entrada-saída do sistema que descreve os erros de estimação e observação associados ao observador.

**Palavras-chaves**— Sistemas descritores, Observadores, Equação de Sylvester, Minimização de Número de Condição, Posicionamento de Autoestrutura.

**Abstract**— From previous results on disturbance decoupled observers design, an observer design problem for descriptor systems with an additional numerical conditioning requirement is considered. The numerical conditioning requirement is related to a nonsingular matrix that is required to be inverted for state estimation purposes. Therefore it is shown that, since chosen a previous solution for the disturbance decoupled observer, the numerical conditioning requirement can be obtained, without the changing of original eigenvalues assignment none input-output type properties of error system associated to the observer.

**Keywords**— Descriptor Systems, Observers, Sylvester's equation, Minimizing Condition Number, Eigenstructure assignment.

## 1 Introdução

O problema de projeto de observadores com desacoplamento de perturbações, para fins de implementação de uma lei de controle de realimentação de estados, tem sido extensivamente estudado na literatura técnica e científica, como por exemplo em (Johnson, 1975) (Bhattacharyya, 1978) (Hou and Muller, 1992) (Syrmos, 1993) (Chen and Patton, 1999). Entretanto, seus resultados são destinados a sistemas lineares clássicos, que consistem de um conjunto de equações diferenciais ordinárias.

Para sistemas descritores, que são compostos por equações diferenciais e equações algébricas, para os quais algumas condições estruturais adicionais devem ser verificadas, o problema de projeto de observadores desacoplados de perturbação tem sido estudado por exemplo em (Yang and Tan, 1989) (Paraskevopoulos et al., 1992) (Darouach et al., 1996) (Chu and Mehrmann, 1999). Alguma condição de posto completo sobre uma matriz associada à reconstrução dos estados estimados, em geral é apresentada nesses trabalhos. Entretanto, mesmo quando tal condição é verificada, a matriz nela envolvida pode estar mal condicionada. Esta possibilidade, que não foi

considerada nos trabalhos citados anteriormente, é tratada com a apresentação de condições para o projeto de um observador com otimização de condicionamento numérico.

Neste trabalho considera-se o problema de projeto de Observadores Desacoplados de Perturbação (ODP) para sistemas descritores lineares contínuos, no sentido proposto em (Silva et al., 2004), com um requisito adicional de condicionamento numérico. Este requisito é utilizado com o objetivo de reduzir o número de condição de uma matriz não singular envolvida no cálculo de matrizes estruturais do observador. Isto permite obter resultados numéricos mais exatos para as matrizes envolvidas e melhorar o comportamento dinâmico de sinais indicadores de desempenho.

Este trabalho está organizado como segue. Na *Seção 2* é feita a apresentação do problema a ser tratado. Na *Seção 3*, apresenta-se uma proposição para projeto de observadores desacoplados de perturbação, da forma dada em (Silva et al., 2004), com um requisito adicional de condicionamento numérico. Na *Seção 4* mostra-se que, além do desacoplamento de perturbações, outros requisitos de desempenho podem ser considerados para a escolha de uma solução prévia, que serão preservados com o procedimento posterior de otimização

do condicionamento numérico. Nas Seções 5 e 6 apresentam-se um exemplo ilustrativo e as conclusões, respectivamente.

## 2 Apresentação do Problema

Considere um sistema descritor linear em tempo contínuo representado por:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_w w(t) \quad (2)$$

para o qual  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $w \in \mathbb{R}^r$  são, respectivamente, os vetores de estados, de saídas medidas, de entradas de controle e de entradas de perturbação. A matriz  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é tal que  $\text{posto}(E) = q < n$ , que caracteriza um modelo de sistema descritor linear,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , com  $\text{posto}(B) = m$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , com  $\text{posto}(C) = p$ ,  $B_w \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , com  $\text{posto}(B_w) = r$  e  $D_w \in \mathbb{R}^{p \times r}$ , com  $\text{posto}(D_w) = \tilde{r} < p$ .

Dado um sistema descritor (1),(2), considere as matrizes  $(T, Z, H)$  que verificam

$$TA - HTE = -ZC, \quad \sigma(H) \subset \mathcal{C}^- \quad (3)$$

$$TB_w + ZD_w = 0 \quad (4)$$

$$\text{posto} \left( \mathbf{M} = \begin{bmatrix} TE \\ \tilde{Q}LA \\ \tilde{Q}C \end{bmatrix} \right) = n \quad (5)$$

em que  $L \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ ,  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(n-q-\tilde{r}) \times (n-q)}$ ,  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(p-\tilde{r}) \times p}$ , são matrizes tais que  $LE = 0$ ,  $\tilde{Q}(LB_w) = 0$ ,  $\text{posto}(\tilde{Q}) = n - q - \tilde{r}$ ;  $\tilde{Q}D_w = 0$ , com  $\text{posto}(\tilde{Q}) = p - \tilde{r}$ .

Defina  $B_d \in \mathbb{R}^{(n-q) \times r}$  e  $\tilde{r} \in \mathbb{R}$ , por:

$$B_d = LB_w \quad (6)$$

$$\tilde{r} = \text{posto}(B_d) < n - q \quad (7)$$

Como extensão de um resultado dado em (Silva et al., 2004), consideram-se os sinais auxiliares  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{n-q-\tilde{r}}$  e  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{p-\tilde{r}}$ , que são determinados a partir das matrizes  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{Q}$ . Devido à não-unicidade na determinação dessas matrizes, será utilizada a seguinte parametrização para os sinais auxiliares  $\bar{y}$  e  $\tilde{y}$ :

$$\bar{y}(t) = -\tilde{D}\tilde{Q}LBu(t) \quad (8)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{D}\tilde{Q}y(t) \quad (9)$$

em que  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(n-q-\tilde{r}) \times (n-q-\tilde{r})}$ ,  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(p-\tilde{r}) \times (p-\tilde{r})}$  são matrizes não singulares.

As matrizes  $\tilde{D}$  e  $\tilde{D}$  fornecem graus de liberdade que podem ser explorados para se obter algum requisito via projeto. Em particular será demonstrado neste trabalho sua utilização para se obter melhora de condicionamento numérico de uma matriz não singular envolvida no cálculo de outras matrizes do observador. Isto é feito com base na técnica denominada *minimização de*

número de condição por escalonamento, dada em (Boyd et al., 1989).

O lema e a proposição apresentados na sequência contêm mais fundamentos para o problema a ser tratado.

**Lema 2.1** *Encontrada uma solução  $(T, Z, H)$  para a equação de Sylvester (3), o conjunto de soluções que compartilham a mesma forma de Jordan de  $H$  pode ser obtido pela pre-multiplicação de (3) por uma matriz de parâmetro  $D \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , não singular. Isto resulta em uma equação de Sylvester parametrizada, a partir de (3), para a qual obtém-se o conjunto de soluções  $(DT, DZ, \mathbb{H})$ , onde  $DH = \mathbb{H}D$ .*

Observe que a parametrização dada no Lema 2.1 também se aplica à condição adicional (4). Assim, o uso da matriz  $D$ , conjuntamente com as matrizes  $\tilde{D}$  e  $\tilde{D}$ , como parâmetros de otimização em um ODP, torna-se mais evidente na proposição seguinte.

**Proposição 2.1** *Considere o sistema descritor (1), (2), e que as condições (3),(4), (5) são verificadas. Então, para quaisquer matrizes não singulares  $D \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(n-q-\tilde{r}) \times (n-q-\tilde{r})}$  e  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(p-\tilde{r}) \times (p-\tilde{r})}$ , o observador de estados*

$$\dot{z}(t) = \mathbb{H}z(t) + \mathbb{T}Bu(t) - \mathbb{Z}y(t) \quad (10)$$

$$\hat{x}(t) = \mathbb{S}z(t) + \tilde{\mathbb{N}}\bar{y}(t) + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{y}(t) \quad (11)$$

para o qual:

$$\mathbb{H} = DHD^{-1}, \quad \mathbb{T} = DT, \quad \mathbb{Z} = DZ \quad (12)$$

$$[\mathbb{S} \quad \tilde{\mathbb{N}} \quad \tilde{\mathbb{N}}] = \begin{bmatrix} TE \\ \tilde{Q}LA \\ \tilde{Q}C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}^{-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

é tal que o erro de estimação e o erro de observação, respectivamente definidos por

$$\varepsilon(t) = z(t) - \mathbb{T}Ex(t) \quad (14)$$

$$\epsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (15)$$

são desacoplados da perturbação e dados por

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbb{H}\varepsilon(t) \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \mathbb{S}\epsilon(t) \quad (17)$$

**Demonstração:**

Aplicando o Lema 2.1, com as relações em (12), pode-se deduzir que:

$$TA - \mathbb{H}TE = -ZC, \quad \sigma(\mathbb{H}) \subset \mathcal{C}^- \quad (18)$$

$$\mathbb{T}B_w + \mathbb{Z}D_w = 0 \quad (19)$$

Derivando (14), em relação ao tempo, resulta  $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{z}(t) - \mathbb{T}E\dot{x}(t)$ . Combinando esta equação com (1), (10), e posteriormente com (2), (14), (18), após alguns passos algébricos, encontra-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = \mathbb{H}\varepsilon(t) - (\mathbb{T}B_w + \mathbb{Z}D_w)w(t)$$

a qual, devido à condição de desacoplamento de perturbação (19), implica em (16).

Para demonstrar (17) considera-se inicialmente a pré-multiplicação de (1) por  $\bar{D}\bar{Q}L$ , usando as definições  $LE = 0$ ,  $\bar{Q}(LB_w) = 0$  e (8), de modo que  $\bar{y}(t) = \bar{D}\bar{Q}Lx(t)$ . Considera-se também a substituição de (2) em (9), usando a definição  $\tilde{Q}D_w = 0$ , o que resulta em  $\tilde{y}(t) = \bar{D}\tilde{Q}Cx(t)$ . Além disso, note que a equação do erro (14) é equivalente a  $z(t) = \varepsilon(t) + \mathbb{T}Ex(t)$ . Então, substituindo em (11) estas expressões, deduzidas, respectivamente, para  $\bar{y}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  e  $z(t)$ , encontra-se

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \mathbb{S} & \bar{\mathbb{N}} & \tilde{\mathbb{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) + \mathbb{T}Ex(t) \\ \bar{D}\bar{Q}Lx(t) \\ \bar{D}\tilde{Q}Cx(t) \end{bmatrix}.$$

Combinando esta expressão com (13) e (15), lembrando que  $\mathbb{T} = DT$ , resulta (17).

□

Portanto, tendo em vista a proposição acima, deseja-se, a partir de uma solução previamente encontrada  $(T, Z, H)$ , utilizar os graus de liberdade representados pelas matrizes  $D$ ,  $\bar{D}$  e  $\tilde{D}$ , para projetar o sistema observador (10), (11), segundo um critério numérico, conforme proposto na seqüência.

Para especificar o problema a ser tratado neste trabalho, consideram-se inicialmente as notações e definições seguintes. Defina a matriz não singular envolvida em (13), por:

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & \bar{D} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \bar{Q}LA \\ \tilde{Q}C \end{bmatrix} \quad (20)$$

Seja  $\kappa(\mathbb{M})$  o número de condição de  $\mathbb{M}$  e considere um escalar  $\varphi \geq 1$ .

### Problema: Otimização do condicionamento numérico

Considere que uma solução inicial  $(T, Z, H)$ , para as equações (3), (4), (5), tenha sido previamente obtida. Deseja-se obter matrizes  $D$ ,  $\bar{D}$  e  $\tilde{D}$  tais que  $\kappa(\mathbb{M}) \leq \varphi$ , sendo  $\varphi$  o menor possível.

O problema proposto justifica-se pelo fato de a matriz não singular  $\mathbb{M} = \begin{bmatrix} (TE)' & (\bar{Q}LA)' & (\tilde{Q}C)' \end{bmatrix}'$ , envolvida em (5) e (13), geralmente apresentar mal condicionamento numérico. Visando melhorar este condicionamento, os graus de liberdade na escolha da matriz  $\text{diag}\{D, \bar{D}, \tilde{D}\}$  podem ser usados com base na técnica de *minimização de número de condição por escalonamento*, dada em (Boyd et al., 1989), resumida na seção seguinte. Além disso, o requisito de condicionamento numérico permite encontrar valores mais exatos para as matrizes  $\mathbb{S}$ ,  $\bar{\mathbb{N}}$  e  $\tilde{\mathbb{N}}$ , obtidas a partir da inversão de  $\mathbb{M}$  e pode ser usado como passo posterior à obtenção de outros critérios de desempenho.

Neste trabalho, consideraremos que o requisito de desempenho previamente estabelecido consiste de um posicionamento exato de pólos do observador desacoplado de perturbações, o qual pode ser obtido conforme comentário a seguir. Entretanto, outros requisitos poderiam ser considerados para a determinação da solução prévia  $(T, Z, H)$ , como será discutido posteriormente

**Comentário 2.1** (Silva et al., 2004) *Sob as hipóteses de que o sistema tem menos entradas de perturbação que saídas medidas,  $r < p$ , e é fortemente zero-detectável, que implica posto  $\left( \begin{bmatrix} A - \lambda E & B_w \\ C & D_w \end{bmatrix} \right) = n+r$ ,  $\forall \lambda \notin \mathcal{C}$ ,  $\lambda$  finito, e posto  $\left( \begin{bmatrix} E \\ LA \\ C \end{bmatrix} \right) = n$ , a ordem do observador é determinada entre os casos relacionados na seqüência.*

Caso 1 *Se  $B_d \neq 0$  e  $D_w \neq 0$ , utiliza-se a estrutura mais geral, de ordem  $k = q - p + \bar{r} + \tilde{r}$ .*

Caso 2 *Se  $B_d = 0$  e  $D_w = 0$ , utiliza-se uma estrutura de ordem mínima  $k = q - p$ , na qual  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$  e  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  são matrizes de posto completo. Por simplicidade, pode-se escolher  $\bar{Q} = I_{n-q}$  e  $\tilde{Q} = I_p$ .*

Caso 3 *Se  $B_d = 0$  e  $D_w \neq 0$ , utiliza-se uma estrutura de ordem  $k = q - p + \tilde{r}$ , na qual  $\bar{Q} = I_{n-q}$ .*

Caso 4 *Se  $B_d \neq 0$  e  $D_w = 0$  utiliza-se uma estrutura de ordem reduzida  $k = q - p + \bar{r}$ , para qual  $\tilde{Q} = I_p$ .*

*A técnica de posicionamento de autoestrutura resumida na equação seguinte, pode ser usada para resolver a equação de Sylvester (3) sob a condição (4), visando encontrar as matrizes  $T$  e  $Z$ :*

$$\begin{bmatrix} \tau'_i & \zeta'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \lambda_i E & B_w \\ C & D_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na qual  $\tau_{i+1} = \tau_i^*$  e  $\zeta_{i+1} = \zeta_i^*$ , se  $\Im m(\lambda_i) \neq 0$ . A matriz  $H$  correspondente, na forma de Jordan, é  $H = \text{diag}\{H_i\}$  onde  $H_i = \lambda_i$  se  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , e  $H_i = \begin{bmatrix} \Re\{\lambda_i\} & \Im\{\lambda_i\} \\ -\Im\{\lambda_i\} & \Re\{\lambda_i\} \end{bmatrix}$  se  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ .

### 3 Síntese de Observador com Otimização

Nesta seção, a condição para a solução do problema de otimização do condicionamento numérico é proposta com base no *Lema 2.1*, na *Proposição 2.1*, e numa caracterização LMI do número de condição de matrizes. Preliminarmente, apresenta-se o comentário seguinte, baseado em resultado dado em (Boyd et al., 1989).

**Comentário 3.1** *O número de condição de uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{a \times b}$ , com  $a \geq b$ , denotado por  $\kappa(M)$ ,*

é a razão entre o seu maior e o seu menor valores singulares para  $M$  de posto completo e igual a  $\infty$  caso contrário. Considere um escalar fixo  $\varphi \geq 1$ . Existem matrizes simétricas e não singulares  $U \in \mathbb{R}^{a \times a}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{b \times b}$  tais que  $\kappa(UMV) \leq \varphi$  se e somente se as seguintes restrições LMI são verificadas:

$$Y_r \leq M'Y_lM \leq \varphi^2 Y_r, \quad Y_l > 0, \quad Y_r > 0 \quad (21)$$

onde  $Y_l = Y_l' = U'U$ ,  $Y_r = Y_r' = (VV')^{-1}$ . Esta conceituação permite determinar matrizes  $U$  e  $V$  de modo que o número de condição  $\kappa(UMV) \leq \varphi$  seja o menor possível. Este objetivo pode ser atingido, através, por exemplo, do seguinte problema de otimização:

- *min.*  $\varphi^2$   
sujeito a (21).

As condições propostas para obter um bom condicionamento numérico para a matriz  $\mathbb{M}$ , definida em (20), são apresentadas a seguir.

**Proposição 3.1** *Suponha que uma solução  $(T, Z, H)$  e as matrizes  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{Q}$  são previamente determinadas. Considere a matriz  $\mathbb{M}$ , definida em (20), e um escalar  $\varphi \geq 1$ .*

*Existem matrizes  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{S}$ ,  $\tilde{\mathbb{N}}$ ,  $\tilde{\mathbb{N}}$  tais que  $\kappa(\mathbb{M}) \leq \varphi$ , se existe uma matriz definida positiva  $\text{diag}\{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , verificando  $\text{diag}\{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3\} = \text{diag}\{D'D, \tilde{D}'\tilde{D}, \tilde{D}'\tilde{D}\}$ , para a qual:*

$$I_n \leq \begin{bmatrix} TE \\ \tilde{Q}LA \\ \tilde{Q}C \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \tilde{Q}LA \\ \tilde{Q}C \end{bmatrix} \leq \varphi^2 I_n \quad (22)$$

#### Demonstração:

Considerando (21), suponha que as matrizes  $M$  e  $Y_l$  são dadas particularmente por  $M = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} (TE)' & (\tilde{Q}LA)' & (\tilde{Q}C)' \end{bmatrix}'$ ,  $Y_l = \text{diag}\{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3\}$ ; e a matriz  $Y_r = Y_r' > 0$ , em particular pode ser fixa e igual à matriz identidade, ou seja  $Y_r = I_n$ . Substituindo estas matrizes em (21), obtém-se (22).  
□

O resultado da *Proposição 3.1* permite obter um bom condicionamento numérico para a matriz  $\mathbb{M}$ , definida em (20). Por conseguinte, valores mais exatos para as matrizes  $\mathbb{S}$ ,  $\tilde{\mathbb{N}}$ ,  $\tilde{\mathbb{N}}$ , calculados através de (13), podem ser obtidos. Para tanto, pode-se considerar o problema de otimização convexa seguinte:

- *min.*  $\varphi^2$   
sujeito a (22).

## 4 Discussão

Como comentado anteriormente, neste trabalho consideramos um requisito inicial de posicionamento de pólos do observador desacoplado de perturbações para definição de uma solução prévia

$(T, Z, H)$  e, assim, posteriormente realizar a otimização do condicionamento numérico.

Deseja-se mostrar que outros critérios podem também ser considerados para a escolha da solução prévia, os quais também são preservados com o procedimento posterior de otimização do condicionamento numérico. Para ilustrar, considere um ruído de medição na saída do sistema, denotado  $\eta \in \mathbb{R}^d$ , tal que a equação de saída (2) é dada por:

$$y(t) = Cx(t) + D_w w(t) + G\eta(t), \quad G \in \mathbb{R}^{p \times d} \quad (23)$$

Neste caso, considerando-se o observador desacoplado de perturbações, os erros de estimação e de observação são dados pelo sistema de erro seguinte:

$$\dot{\epsilon}(t) = \mathbb{H}\epsilon(t) - \mathbb{Z}G\eta(t) \quad (24)$$

$$\epsilon(t) = \mathbb{S}\epsilon(t) + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}G\eta(t) \quad (25)$$

Pode-se então verificar que a função de transferência da entrada de ruído para o erro de observação, denotada  $G_{\eta\epsilon}(s)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} G_{\eta\epsilon}(s) &= -\mathbb{S}(sI - \mathbb{H})^{-1}\mathbb{Z}G + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}G \\ &= -S(sI - H)^{-1}\mathbb{Z}G + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{Q}}G \end{aligned}$$

em que  $S = \mathbb{S}D$  e  $\tilde{N} = \tilde{\mathbb{N}}\tilde{D}$ .

Verifica-se, portanto, que as propriedades entrada-saída do sistema de erro (24), (25) são invariantes para a família de observadores parametrizada pelas soluções  $(\mathbb{T}, \mathbb{Z}, \mathbb{H})$ , obtida partir de uma solução prévia  $(T, Z, H)$ .

Uma análise similar pode ser feita para o caso em que as condições de desacoplamento não são verificadas, que corresponde a  $\tilde{Q}(LB_w) \neq 0$ ,  $\tilde{Q}D_w \neq 0$  e  $TB_w + ZD_w \neq 0$ . Para este caso, desconsiderando-se a presença de ruído de medição, os erros de estimação e de observação são dados pelo sistema de erro com entrada de perturbação seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= \mathbb{H}\epsilon(t) - (\mathbb{T}B_w + \mathbb{Z}D_w)w(t) \\ \epsilon(t) &= \mathbb{S}\epsilon(t) + (\tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}LB_w + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}D_w)w(t) \end{aligned}$$

e a função de transferência da entrada de perturbação para o erro de observação, denotada  $G_{\eta\epsilon}(s)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} G_{\eta\epsilon}(s) &= -\mathbb{S}(sI - \mathbb{H})^{-1}(\mathbb{T}B_w + \mathbb{Z}D_w) \\ &\quad + (\tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}LB_w + \tilde{\mathbb{N}}\tilde{\mathbb{D}}\tilde{\mathbb{Q}}D_w) \\ &= -S(sI - H)^{-1}(TB_w + ZD_w) \\ &\quad + (\tilde{N}\tilde{Q}LB_w + \tilde{N}\tilde{Q}D_w) \end{aligned}$$

Conclui-se assim, que a técnica de otimização posterior, do condicionamento numérico da matriz  $\mathbb{M}$ , é uma ferramenta simples e eficiente para a síntese de observadores em sistemas descritores, preservando não somente o posicionamento dos pólos do observador, mas também propriedades entrada-saída relacionadas ao sistema de erro.

## 5 Exemplo

Considere as matrizes  $E, A, C, B_w, D_w$ , correspondentes a um sistema descritor fortemente zero-detectável e regular:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]',$$

$$D_w = \begin{bmatrix} 0.7382 \\ 0.1763 \end{bmatrix}.$$

Note que  $LB_w \neq 0$  e  $D_w \neq 0$ , que corresponde ao *Caso 1, Comentário 2.1*, para o qual a ordem do observador é  $k = q - p + \bar{r} + \tilde{r} = 4$ . Visando uma avaliação comparativa, sob o ponto de vista de condicionamento numérico, dois projetos de ODP, com os autovalores  $\Lambda = \{-1 \pm 2i, -2 \pm 3i\}$ , foram realizados. Para um deles, nenhum requisito de condicionamento numérico foi considerado, o que correspondeu à encontrar uma solução prévia para o ODP baseada no *Comentário 2.1*. Para o outro projeto, a solução com otimização numérica baseada na *Proposição 3.1* foi encontrada. Para os dois projetos respectivamente, os seguintes valores de matrizes  $(S, \bar{N}, \tilde{N})$ ,  $(\mathbb{S}, \bar{\mathbb{N}}, \tilde{\mathbb{N}})$ , e de número de condição  $\kappa(\mathbf{M})$ ,  $\kappa(\mathbb{M})$ , foram encontrados:

$$S = \begin{bmatrix} -34.4534 & 1.2444 & 39.2446 & -9.3827 \\ 18.6248 & -43.7104 & -9.0899 & 87.6704 \\ -18.8219 & -78.7309 & 53.0000 & 160.0732 \\ -8.2755 & -9.0846 & 14.0028 & 13.6077 \\ -6.1751 & -38.8093 & 21.4273 & 80.9563 \\ -14.4506 & -47.8939 & 35.4301 & 94.5640 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} -0.3312 & 0.0505 & -0.2504 & 0.0161 \\ 0.1791 & -0.2383 & -0.2868 & -0.0604 \\ -0.1809 & -0.3617 & 0.1492 & 0.0938 \\ -0.0796 & -0.0339 & 0.0718 & -0.4289 \\ -0.0594 & -0.1823 & -0.0340 & 0.3073 \\ -0.1389 & -0.2161 & 0.0378 & -0.1216 \end{bmatrix},$$

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, \quad \tilde{N} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.4086 \\ 0.4086 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbb{N}} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.5141 \\ 0.5141 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{N}} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4086 \\ 0.4086 \end{bmatrix},$$

$$\kappa(\mathbf{M}) = 444.1425, \quad \kappa(\mathbb{M}) = 2.1104$$

Note que o número de condição da matriz  $\mathbb{M}$  é muito menor que o número de condição da matriz  $\mathbf{M}$ , obtida como solução preliminar via posicionamento de autoestrutura. Uma consequência prática da aplicação do procedimento de otimiza-

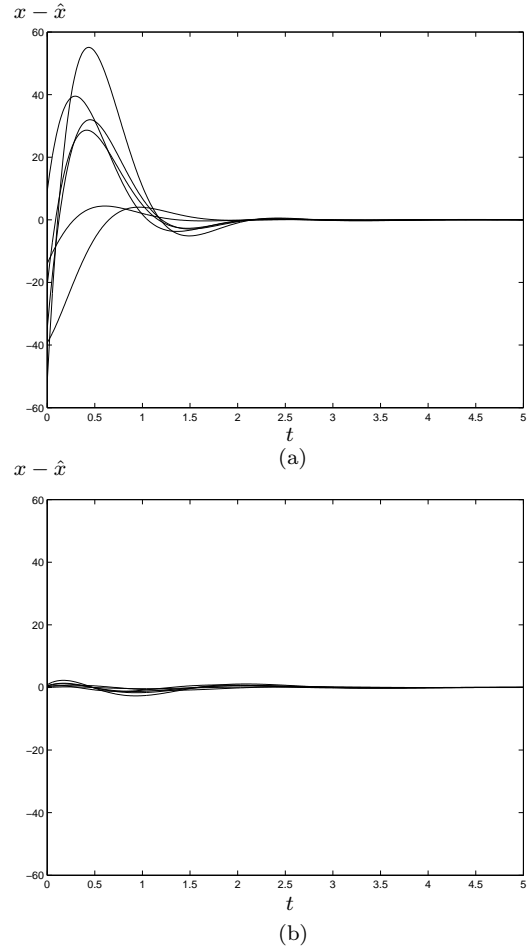


Figura 1: Curvas de  $x(t) - \hat{x}(t)$  para: (a) o ODP sem requisito de condicionamento numérico, (b) o ODP com requisito de condicionamento numérico.

ção do condicionamento numérico sobre o ODP é uma melhora na curva de resposta do erro  $[x(t) -$

$\hat{x}(t)$ ] como mostrado na Figura 1. Note que o comportamento transitório do erro  $[x(t) - \hat{x}(t)]$  é sensivelmente melhorado para o ODP com otimização quando comparado com o comportamento do erro para o ODP sem otimização do condicionamento numérico.

## 6 Conclusões

Foi tratado um problema de projeto de observadores de estado para sistemas descritores, que consiste basicamente na combinação de uma técnica de projeto de Observador Desacoplado de Perturbação (ODP) dada em (Silva et al., 2004) com uma técnica de minimização de número de condição dada em (Boyd et al., 1989). Esta combinação permitiu adicionar ao projeto de ODP condições para a melhoria de um certo condicionamento numérico. Esta melhoria consiste na minimização do número de condição de uma matriz não singular envolvida no cálculo de matrizes estruturais do observador. Isto permite obter valores numéricos mais exatos para essas matrizes, além de contribuir para a melhora do comportamento dinâmico do erro entre os estados reais e os estados estimados do sistema, como mostrado no exemplo. Os resultados propostos são baseados na definição de um conjunto solução para uma equação de Sylvester generalizada, bem como na extensão da definição de sinais auxiliares dada em (Silva et al., 2004). A articulação entre essas duas idéias garantiu a inclusão de matrizes de parâmetros  $(D, \bar{D}, \tilde{D})$ , que foram utilizadas para obter uma solução otimizada. As condições para a existência desta solução podem ser implementadas numericamente através de técnica de programação convexa por LMI (Linear Matrix Inequality). Por fim, destaca-se que a técnica de otimização posterior, do condicionamento numérico da matriz  $\mathbb{M}$ , preserva não somente o posicionamento dos pólos do observador, mas também propriedades entrada-saída relacionadas ao sistema de erro.

## Referências

- Bhattacharyya, S. O. (1978). Observer design for linear systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control* **23**: 483–484.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1989). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.
- Chen, J. and Patton, R. J. (1999). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- Chu, D. and Mehrmann, V. (1999). Disturbance decoupled observer design for descriptor systems, *System & Control Letters* **38**: 37–48.
- Darouach, M., Zasadzinski, M. and Hayar, M. (1996). Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(7): 1068–1072.
- Hou, M. and Muller, P. C. (1992). Observer for linear descriptor systems with unknown inputs control, **40**: 220–227.
- Johnson, C. D. (1975). On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs, *International Journal of Control* **21**: 825–831.
- Paraskevopoulos, P. N., Koumboulis, F. N., Tzierakis, K. G. and Panagiotakis, G. E. (1992). Observers design for generalized state space systems with unknown inputs, *System & Control Letters* **18**: 309–321.
- Silva, V. G., Castelan, E. B., Garcia, G. and Tarbouriech, S. (2004). Sobre observadores desacoplados de perturbação para sistemas descritores, *XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA '04)*, Gramado-RS .
- Syrmos, V. L. (1993). Computational observer design techniques for linear systems with unknown inputs using the concept of transmission zeros, *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(5): 790–794.
- Yang, C. W. and Tan, H. L. (1989). Observer design for singular systems with unknown inputs, *International Journal of Control* **49**: 1937–1946.